Ejercicios Unidad 3

Probabilidad I 2025-2

Entrega: sábado 29 de marzo

1. Calcule la varianza de las siguientes variables aleatorias:

   a) **Distribución Uniforme Discreta:** Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme discreta en los valores $1, 2, \ldots, n$, es decir, su función de masa de probabilidad es:

   $$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

   Compare su respuesta con la varianza de la distribución uniforme continua $\text{Unif}(0, n)$.

   b) **Distribución de Pareto:** Sea X una variable aleatoria con distribución de Pareto de parámetros $x_m > 0$ y $\alpha > 0$, cuya función de densidad de probabilidad es:

   $$f_X(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbf{1}(x)_{(x_m,\infty)}.$$

   Determinar la varianza de X, asumiendo que $\alpha > 2$ para que la varianza esté definida.

2. Sea $X \sim \exp(\lambda)$, es decir, su función de densidad de probabilidad está dada por:

   $$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}(x)_{(0,\infty)}.$$

   Demuestre que X satisface la propiedad de pérdida de memoria, es decir, demostrar que para cualquier $s, t > 0$ se cumple:

   $$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

3. Demostrar que la varianza de una variable aleatoria X puede expresarse en términos de su segundo momento factorial, es decir, demostrar que:

   $$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X(X - 1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

   Utilice la relación obtenida para encontrar la varianza de una variable aleatoria X con distribución geométrica de parámetro p, cuya función de masa de probabilidad está dada por:

   $$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

4. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media $\mu = 50$ y varianza $\sigma^2 = 25$. Calcule las siguientes probabilidades mediante estandarización:

a) $P(45 \leq X \leq 55)$.

b) $P(30 \leq X \leq 35)$.

c) $P(70 \leq X \leq 75)$.

Grafique la curva de la distribución normal $N(50, 25)$ y sombree las áreas correspondientes a cada una de las probabilidades calculadas.

5. La siguiente tabla muestra la **distribución conjunta** de dos variables aleatorias X e Y, que representan el número de productos defectuosos encontrados en dos líneas de producción durante una hora.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.30	0.15	0.05
1	0.10	0.20	0.05
2	0.05	0.05	0.05

a) Determina las **distribuciones marginales** de X e Y.

b) Verifica si X e Y son **independientes** comprobando si la condición

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \quad \text{para todo } x, y$$

se cumple.

6. Se tiene la siguiente distribución conjunta de dos variables aleatorias X e Y, donde la probabilidad conjunta $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ está dada por la siguiente matriz:

$$\mathbb{P}_{X,Y} = \begin{array}{c|ccc} X \backslash Y & y_1 & y_2 & y_3 \\ \hline x_1 & 0.1 & 0.15 & 0.05 \\ x_2 & 0.05 & 0.2 & 0.1 \\ x_3 & 0.1 & 0.15 & 0.1 \end{array}$$

Calcule:

a) Las funciones de mása de probabilidad marginales f_X y f_Y

b) La función de masa de probabilidad de $Z = X + Y$

c) La esperanza de X, Y y $X + Y$.

d) La varianza de X, Y y $X + Y$.

7. Sea X una variable aleatoria discreta, positiva y definida en los valores $\{1, 2, 3, \dots\}$, con función de masa de probabilidad $\mathbb{P}(X = k)$. Demuestre que su esperanza se puede expresar en términos de las probabilidades de cola de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

Use esta formula para encontrar nuevamente la esperanza de $X \sim \text{Geo}(p)$.

8. Se define la función Gama como

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx, \quad \text{para } s > 0.$$

Demuestre la siguiente propiedad recursiva de la función Gamma:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

9. Responda los siguientes problemas relacionados con el cálculo de cuantiles.

   a) Encontrar los cuartiles de una variable aleatoria que sigue una distribución uniforme continua $\text{Unif}(a, b)$.

   b) Determinar la mediana o medianas de una variable aleatoria con distribución binomial $\text{Bin}(n, p)$ y grafique el caso $n = 5, p = 1/2$.

   c) Calcular el percentil 99 de una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$.

10. Se tiene el siguiente conjunto de datos correspondiente al tiempo (en minutos) que tarda un servidor en procesar solicitudes:

$$\{15, 22, 18, 30, 25, 19, 24, 27, 21, 23, 28, 20, 26, 29, 17\}$$

   a) Grafica la distribución empírica acumulativa (función de distribución empírica) de los datos.

   b) Calcula la mediana del conjunto de datos.

11. Calcule la moda de las siguientes distribuciones:

   a) Distribución binomial $\text{Bin}(n, p)$.

   b) Distribución de Poisson $\text{Poi}(\lambda)$.

   c) Distribución geométrica $\text{Geo}(p)$.

   d) Distribución uniforme continua $\text{Unif}(a, b)$.

   e) Distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$.

   f) Distribución exponencial con parámetro λ.

12. En un experimento, se lanzan 100 monedas justas. Definimos la variable aleatoria X como el número de águilas obtenidas en los 100 volados, es decir $X \sim \text{Bin}(100, 0.5)$.

    Calcule la probabilidad de obtener entre 45 y 55 águilas, es decir,

$$\mathbb{P}(45 \leq X \leq 55),$$

    de las siguientes maneras:

   a) Utilizando la distribución binomial exacta.

   b) Aproximando la binomial mediante una distribución normal y aplicando la corrección por continuidad.

13. En una fábrica, la probabilidad de que un producto salga defectuoso es $p = 0.02$. Se produce un lote de $n = 500$ productos y definimos la variable aleatoria X como el número de productos defectuosos en el lote, es decir $X \sim \text{Bin}(500, 0.02)$.

    Calcule la probabilidad de que haya 15 o menos productos defectuosos de las siguientes maneras:

    a) Utilizando la distribución binomial exacta.

    b) Aproximando la binomial mediante una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = np$.

14. En una planta automotriz, la longitud de una pieza específica tiene una media de $\mu = 15$ cm y una desviación estándar de $\sigma = 0.4$ cm. Para verificar la calidad, se toma una muestra aleatoria de $n = 50$ piezas.

    a) Usando el Teorema del límite central , aproxima la distribución de la media muestral $\bar{X}$.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de la muestra esté entre 14.9 cm y 15.1 cm?

15. Una empresa de mensajería está evaluando el tiempo de entrega de sus paquetes. Se sabe que el tiempo de entrega tiene una media de $\mu = 48$ horas y una desviación estándar de $\sigma = 12$ horas. Se toma una muestra aleatoria de $n = 100$ envíos.

    a) Usa el Teorema del límite central para aproximar la distribución del tiempo medio de entrega.

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de la muestra sea superior a 50 horas?